I. Pendahuluan

- Pengertian Fisika Statistik
- Dimana Letak Fisika Statistik
- Mengapa perlu pendekatan statistik?
- Jalan Random
- Problem jalan random satu dimensi

1.1. Pengertian dan Lingkup Fisika Statistik

Fisika Statistik ➔ Mekanika Statistik

Fisika Statistik merupakan cabang ilmu fisika yang mempelajari sistem banyak partikel dari segi pandang statistik pada besaran mikroskopik untuk menjelaskan besaran makroskopik (khususnya energi) berdasarkan mekanika klassik dan kuantum.

Statistical Mechanics, the branch of physics that seeks to predict the average properties of systems which consist of a very large number of particles. Statistical mechanics employs principles of statistics to predict and describe particle motion (Microsoft®Encarta®99 Encyclopedia)

Dimana letak Fisika Statistik?

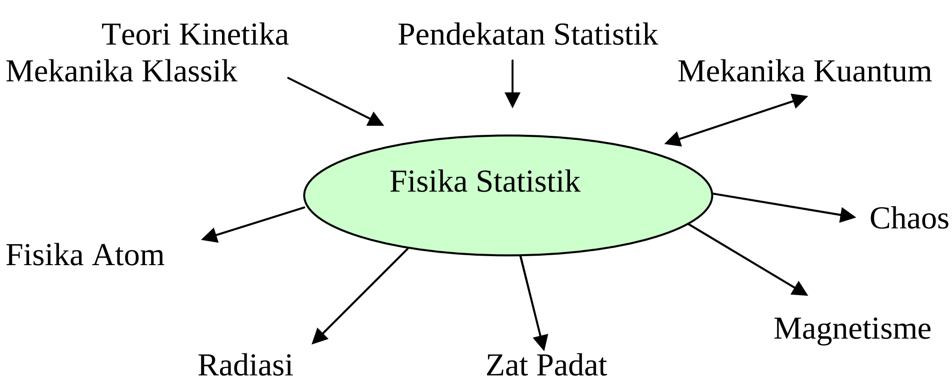
A. Dari pandangan kurikulum:

Fisika Dasar (tentang Panas)

Termodinamika

Fisika Statistik

B. Terhadap cabang Fisika dan ilmu lainnya



Jelaslah bahwa Fisika Statistik berkaitan dengan sistem banyak partikel. Sistem sangat banyak partikel terjadi pada:

Gas, liquid, solid, radiasi elektromagnetik (foton) dll.

Sistem semacam ini terdapat pada sistem fisika, kimia, biologi.

Studi tentang banyak partikel:

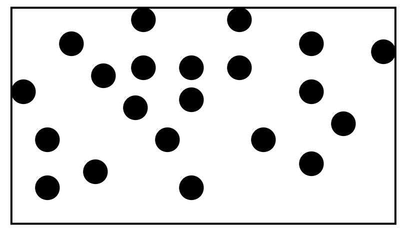
→ dipakai di hampir semua bidang fisika modern yang melihat sistem dari segi pandang mikroskopis. (Lihat hubungan fisika statistik dengan cabang ilmu lain)

Mengapa perlu pendekatan statistik?

Ambil contoh satu mole gas

→ berisi sekitar 10^{23} molekul.

Apabila kita ingin mengetahui keadaan sistem dengan mencari persamaan gerak partikel, lakukan:



- secara klassik dengan mekanika Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \rightarrow \text{jutaan pers. } -kr - G\frac{mM}{r^2} = m\frac{d^2r}{dt^2} \text{ (misalnya)}$$

atau

- secara kuantum dengan persamaan gelombang Schrodinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi \text{ (semua partikel !!!)}$$

maka sangat repot (*complicated*) untuk mencari solusinya.

Apakah mempertimbangkan prilaku setiap partikel itu penting?

Tentu masih penting tetapi dibandingkan komplikasinya

→ lebih baik tinjauan diarahkan pada sifat rata-rata partikel terlebih lagi kalau partikel yang kita tinjau adalah partikel identik dengan jumlah sangat besar.

→ argumentasi statistik ini menjadi efektif.

Apakah setelah ini semua masalah dapat diatasi?

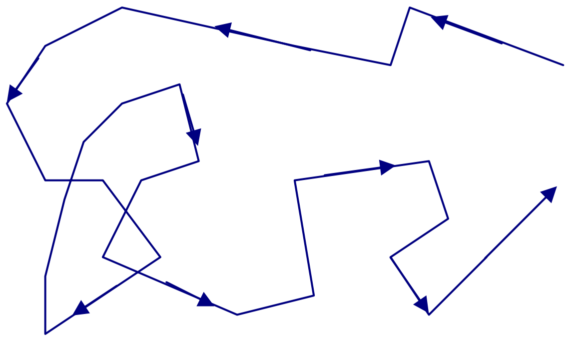
Ternyata tidak (fisika *many body problem* tetap susah dan menimbulkan pertanyaan menarik), tetapi beberapa problem penting dapat disederhanakan secara drastis dengan pendekatan statistik.

1.2. Jalan Random dan Distribusi Binomial

Sebagai tinjauan awal kita perhatikan seseorang yang berjalan *ngalor-ngidul* (random walk) tanpa tujuan.

(Suatu contoh yang tak perlu dicontoh)

Jejak orang tersebut dapat berupa gambar di bawah ini:

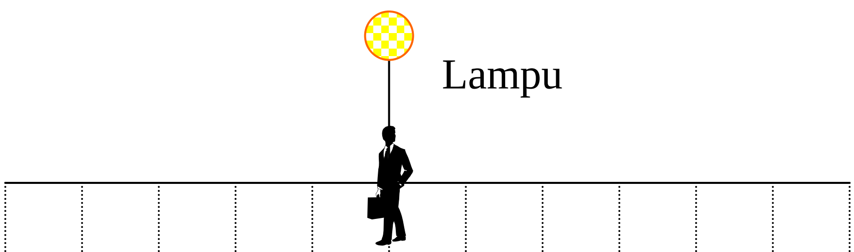


Contoh jalan random

1.2.1. Problem jalan random sederhana dalam satu dimensi

Untuk penyederhanaan masalah, tinjau jalan random hanya satu dimensi dan jarak tiap langkah (= l) dianggap sama.

Anggap orang tersebut mulai melangkah di bawah lampu dan bergerak ke kanan atau ke kiri secara random.



Stop press!!
Sebelum kita lanjutkan ke diskusi jalan random *ngalor-ngidul* kita lihat dulu apa relevansinya ke Fisika. Berikut contoh kasus:

a) Magnetisme: Sebuah atom memiliki spin ½ dan momen magnetik μ; sesuai dengan kaidah mekanika kuantum spin dapat "up" atau "down". Jika kedua kemungkinan ini sama berapa momen magnetik total untuk N atom?
b) Difusi molekul dalam gas: suatu molekul dapat bergerak dalam tiga dimensi dengan jarak rata-rata l pada tumbukan antar molekul. Berapa jauh molekul ini setelah N tumbukan?
c) Problem intensitas oleh N sumber tidak koheren

Setelah N langkah, posisi orang pada:

$x = ml$ (referen $x = 0$ pada lampu)

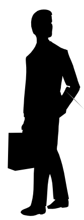
dengan m merupakan bilangan bulat yang terletak diantara:

$$-N \leq m \leq N$$

Sekarang kita hitung kemungkinan $P_N(m)$ untuk menemukan partikel (orang!!) dalam posisi $x = ml$ setelah langkah ke N:

Untuk mempermudah masalah, ambil:

n_1 → jumlah langkah ke kanan



n_2 → jumlah langkah ke kiri

maka

$$N = n_1 + n_2$$

sedangkan pergeseran:

$$m = n_1 - n_2$$

selanjutnya

$$m = n_1 - (N - n_1) = 2\,n_1 - N$$

Contoh ilustrasi untuk $N = 3$

	n_1	n_2	m
→ → →	3	0	3
→ → ←	2	1	1
→ ← →			
← → →			
← ← →			
← → ←	1	2	-1
→ ← ←			
← ← ←	3	0	-3

1.2.2. Formulasi Distribusi Normal

Sekarang tinjau:

$p \rightarrow$ kemungkinan melangkah ke kanan

$q = 1 - p \rightarrow$ kemungkinan melangkah ke kiri

Jadi kemungkinan pada suatu kejadian n_1 step melangkah ke kanan dan n_2 step melangkah ke kiri:

$$\underbrace{pp \ldots\ldots p}_{n_1 \text{ kali}} \ \underbrace{qqq \ldots\ldots q}_{n_2 \text{ kali}} = p^{n_1} q^{n_2}$$

Namun ada sejumlah cara berbeda pada N langkah:

$$\frac{N!}{n_1! n_2!}$$

Jadi seluruh kemungkinan menjadi:

$$W_N(n_1) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

(Kemungkinan pada langkah total N terdapat n_1 langkah ke kanan dan n_2 langkah ke kiri)

Distribusi semacam ini disebut distribusi binomial karena serupa dengan persamaan:

$$(p + q)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N - n)!} p^n q^{N-n}$$

Dari diskusi sebelumnya jelas terlihat bahwa kemungkinan partikel $P_N(m)$ ditemukan pada posisi m setelah langkah ke N adalah $W_N(n_1)$. Dengan perkataan lain:

$$P_N(m) = W_N(n_1)$$

Gunakan $m = n_1 - n_2$ dan $N = n_1 + n_2$, maka

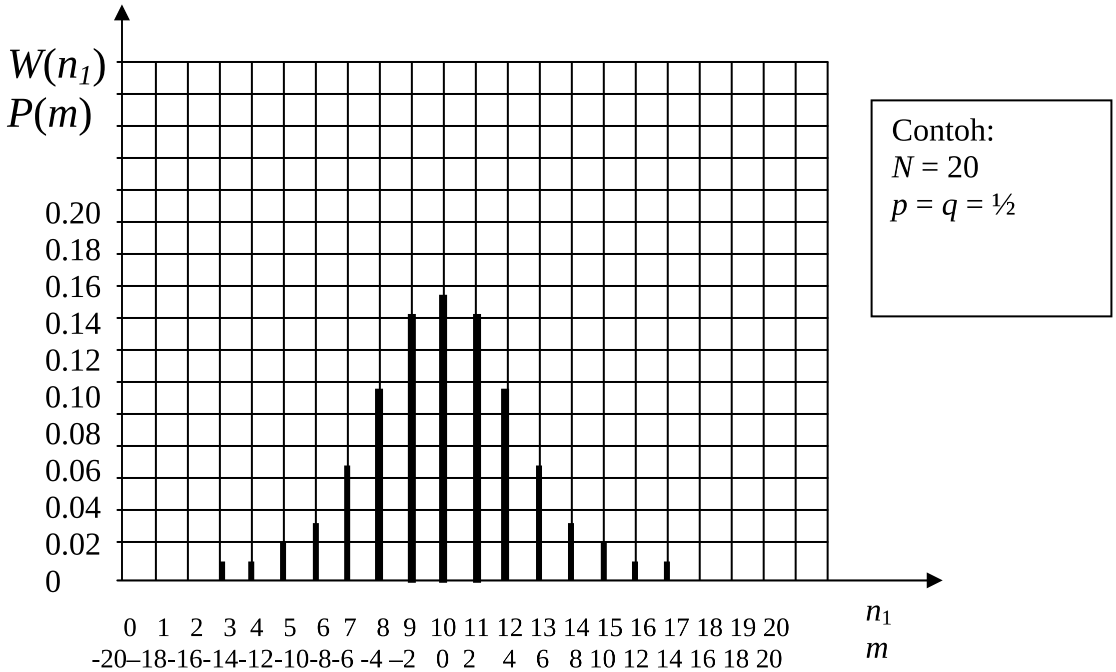
$$n_1 = ½(N + m), \qquad n_2 = ½(N - m)$$

Sehingga:

$$P_N(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]![(N-m)/2]!} P^{(N + m)/2}(1 - p)^{(N - m)/2}$$

Untuk kasus khusus $p = q = ½$, diperoleh:

$$P_N(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]![(N-m)/2]!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$



1.3. Harga rata-rata

Tinjau u merupakan sebuah variabel yang dapat mempunyai M nilai:

$$u_1, u_2, \ldots, u_M$$

dengan masing-masing kemungkinan:

$$P(u_1), P(u_2), \ldots, P(u_M)$$

Harga rata-rata (*mean* atau *average*) dapat dinyatakan:

$$\overline{u} \equiv \frac{P(u_1)u_1 + P(u_2)u_2 + \ldots + P(u_M)u_M}{P(u_1) + P(u_2) + \ldots + P(u_M)}$$

atau secara simbolik:

$$\overline{u} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)}$$

Lebih umum kalau $f(u)$ merupakan fungsi u, maka harga rata-rata:

$$\overline{f(u)} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)\, f(u_i)}{\sum_{i=1}^{M} P(u_i)}$$

(Untuk mereka yang kurang familiar dengan statistika dasar harap membaca buku seperti karangan Anto Dayan dll.)

Persamaan ini dapat disederhanakan

$$P(u_1) + P(u_2) + \ldots + P(u_M) \equiv \sum_{i=1}^{M} P(u_i)$$

biasanya jumlah semua kemungkinan adalah satu:

$$\sum_{i=1}^{M} P(u_i) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, d\tau = 1$$

Sering disebut sebagai "kondisi normalisasi".

sehingga:

$$\overline{f(u)} = \sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i)$$

Selanjutnya apabila *f*(*u*) dan *g*(*u*) adalah dua fungsi *u*, maka:

$$\begin{aligned}\overline{f(u)+g(u)} &= \sum_{i=1}^{M} P(u_i)[f(u_i)+g(u_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{M} P(u_i) f(u_i) + \sum_{i=1}^{M} P(u_i) g(u_i)\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\overline{f(u)+g(u)} = \overline{f(u)} + \overline{g(u)} \qquad \text{(sifat aditif)}$$

Dengan mudah dapat dibuktikan bila *c* konstan, maka:

$$\overline{cf(u)} = c\,\overline{f(u)} \qquad \text{(perkalian skalar)}$$

Harga rata-rata merupakan sebuah karakteristik penting distribusi probabilitas *P*(*u*).
E.g.: nilai rata-rata mahasiswa, ISG, income rata-rata etc.

Namun demikian simpangan dari harga rata-rata juga menunjukkan karakteristik sampel.

Ambil suatu besaran

$$\Delta u \equiv u - \overline{u}$$

yang merupakan deviasi besaran *u* sekitar rata-rata *u*.
Kalau deviasi ini kita rata-ratakan, didapat:

$$\overline{\Delta u} = \overline{(u - \overline{u})} = \overline{u} - \overline{u} = 0$$

→ deviasi rata-rata adalah nol. Jadi besaran ini tidak punya banyak manfaat.

Sekarang kita tinjau besaran lain yang mampu menunjukkan simpangan dari rata-rata tetapi tidak berharga nol.
Kita definisikan:

$$\overline{(\Delta u)^2} = \overline{(u - \overline{u})^2} \equiv \sum_{i=1}^{M} P(u_i)(u_i - \overline{u})^2$$

Besaran ini disebut "momen kedua di sekitar rata-rata" atau "dispersi rata-rata". Besaran ini bernilai positif atau nol.

Bukti sederhana:

$$\overline{(u-\overline{u})^2} = \overline{(u^2 - 2u\overline{u} + \overline{u}^2)} = \overline{u^2} - 2\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u}^2$$

$$\overline{(u-\overline{u})^2} = \overline{u^2} - \overline{u}^2$$

Karena $\overline{u^2} \geq \overline{u}^2$ maka $\overline{(\Delta u)^2} \geq 0$.

Hal lain dapat didefinisikan $\overline{(\Delta u)^n}$ "momen ke-*n* dari *u* pada sekitar harga rata-ratanya", namun jarang digunakan.

Secara sederhana karakteristik sample (distribusi probabilitas) dapat diwakili (meskipun tidak lengkap) oleh harga rata-rata dan nilai simpangannya.

Simpangan baku (deviasi standar): $\Delta^* n = \sqrt{\overline{(\Delta u)^2}}$

1.4. Perhitungan Harga Rata-rata pada Poblem Jalan Random

Kembali ke jalan random, probabilitas dalam langkah total N membuat n_1 langkah ke kanan (yakni $N - n_1 = n_2$ ke kiri) adalah:

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}$$

Kalau dinormalisasikan:

$$\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) = 1$$

Maka

$$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} = (p+q)^N$$

$$= 1^N = 1 \quad \text{karena } q \equiv 1 - p$$

Yang tentu saja sudah dapat diduga sebelumnya.

Sekarang kita lihat apa arti bilangan rata-rata $\overline{n}_1$ step ke kanan?

Kita lihat dari definisi asal:

$$\overline{n}_1 \equiv \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) n_1 = \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1$$

Kalau tidak ada faktor n_1 maka akan terjadi binomial seperti sebelumnya.

Lihat dari pandangan matematika murni:

$$n_1 p^{n_1} = p \frac{\partial}{\partial p}\left(p^{n_1}\right)$$

Sehingga sumasi menjadi:

$$\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p^{n_1}) \right] q^{N-n_1}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \left[\sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)} p^{n_1} q^{N-n_1} \right]$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= pN(p+q)^{N-1} \qquad = pN$$

Jadi

$$\overline{n}_1 = Np$$

Secara fisis hal ini telah jelas! Karena p merupakan kemungkinan melangkah ke kanan, maka jumlah rata-rata step ke kanan pada langkah total N adalah Np.

Hal yang serupa:

$$\overline{n}_2 = Nq$$

$$\overline{n}_1 + \overline{n}_2 = N(p+q) = N$$

Pergeseran $m = n_1 - n_2$ memiliki rata-rata:

$$\overline{m} = \overline{n}_1 - \overline{n}_2 = N(p-q)$$

Kalau $p = q$ maka jelas $\overline{m} = 0$ (jalan di tempat!)

Sekarang kita hitung dispersi:

$$\overline{(\Delta n_1)^2}$$

Secara analog dapat dibuktikan:

$$\overline{(\Delta n_1)^2} = \overline{n_1^2} - \overline{n}_1^2$$

Karena kita sudah mengetahui harga $\overline{n}_1^2$, maka kita hitung $\overline{n_1^2}$.

$$\overline{n_1^2} = \sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) n_1^2$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} n_1^2$$

Karena $n_1^2 p^{n_1} = n_1 \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) (p^{n_1}) = \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p^{n_1})$, maka sumasi tersebut dapat ditulis:

$$
\begin{aligned}
\overline{n_1^2} &= \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 p^{n_1} q^{N-n_1} \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 \sum_{n_1=0}^{N} \frac{N!}{n_1(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1} \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 (p+q)^N \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)[pN(p+q)^{N-1}] \\
&= p\left[N(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}\right] \\
&= p\left[N + pN(N-1)\right] \\
&= Np[1 + pN - p] \\
&= (Np)^2 + Npq
\end{aligned}
$$

Karena $\bar{n}_1 = Np$, maka:

$$\overline{n_1^2} = \bar{n}_1^2 + Npq$$

Jadi:

→ $\overline{(\Delta n_1)^2} = Npq$

Kalau kita secara relatif:

$$\frac{\Delta^* n_1}{\bar{n}_1} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{\sqrt{N}}$$

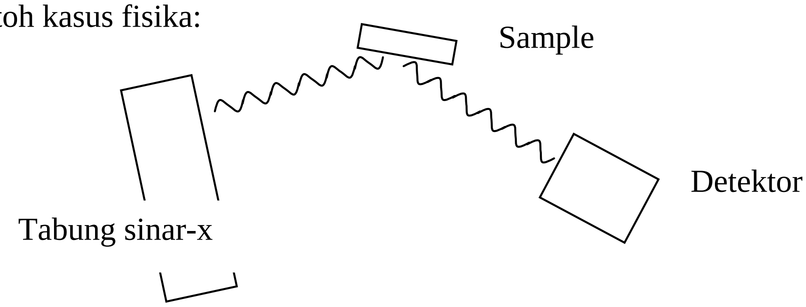
Khususnya untuk $p = q$ → $\dfrac{\Delta^* n_1}{\bar{n}_1} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

Apa makna fisisnya?

$\Delta^* n_1$ dapat diartikan sebagai “kesalahan” terhadap rata-rata

→ pengambilan sampling dalam jumlah besar akan mengakibatkan kesalahan relatif mengecil.

Contoh kasus fisika:



Pertanyaan:
Apa yang harus “diperbanyak” supaya kesalahan jadi kecil?

Sekarang kita hitung dispersi m:

$$m = n_1 - n_2 = 2n_1 - N$$

Sehingga diperoleh:

$$\Delta m \equiv m - \overline{m} = (2n_1 - N) - (2\overline{n}_1 - N) = 2(n_1 - \overline{n}_1) = 2\Delta n_1$$

dan

$$(\Delta m)^2 = 4(\Delta n_1)^2$$

Ambil rata-rata, didapat:

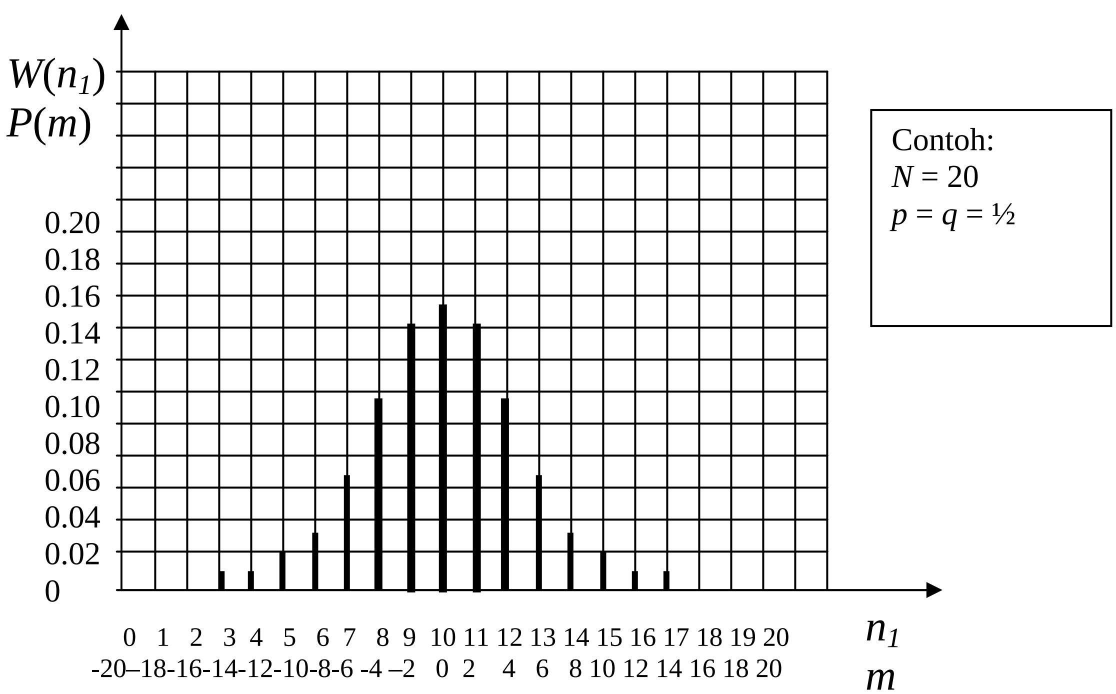
$$\overline{(\Delta m)^2} = 4\overline{(\Delta n_1)^2} = 4Npq$$

Kondisi khusus $p = q = ½$

$$\overline{(\Delta m)^2} = N$$

1.5. Distribusi Probabilitas untuk *N* Besar

Bila N sangat besar, distribusi binomial $W(n_1)$ menunjukkan maksimum yang sangat jelas pada nilai $n_1 = \tilde{n}_1$ dan menjadi berkurang ketika n_1 jauh dari $\tilde{n}_1$.



Bila N sangat besar maka n_1 juga besar sehingga perubahan W sangat kecil:

$$|W(n_1 + 1) - W(n_1)| << W(n_1)$$

→ W dapat dipandang sebagai fungsi kontinu.

Nilai $n_1 = \tilde{n}_1$ didapat bila W maksimum, artinya:

$$\frac{dW}{dn_1} = 0 \text{ atau secara equivalen } \frac{d\ln W}{dn_1} = 0$$

Sekarang kita coba ekspansi Taylor $W(n_1)$ sekitar maksimumnya:

$$n_1 = \tilde{n}_1 + \eta$$

sebagai berikut:

$$\ln W(n_1) = \ln W(\tilde{n}_1) + B_1\eta + \tfrac{1}{2} B_2\eta^2 + \tfrac{1}{6} B_3\eta^3 + \ldots\ldots$$

dengan

$$B_k \equiv \frac{d^k \ln W}{dn_1^k}$$

Mengingat ln W maksimum pada $n_1 = \tilde{n}_1$, maka $B_1 = 0$ dan B_2 pasti negatif (buktikan!!), secara eksplisit ditulis $B_2 = -|B_2|$, sehingga:

$$W(n_1) = \tilde{W}e^{-\frac{1}{2}|B_2|\eta^2}\ e^{-\frac{1}{6}B_3\eta^3}\ldots\ldots$$

Pada daerah η sangat kecil ekspansi berubah menjadi:

$$W(n_1) = \tilde{W}e^{-\frac{1}{2}|B_2|\eta^2}$$

Sekarang kita cari berapa nilai $|B_2|$, dari $W(n_1) = \dfrac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{N-n_1}$

diperoleh:

$$\ln W(n_1) = \ln N! - \ln n_1! - \ln(N-n_1)! + n_1 \ln p + (N-n_1)\ln q$$

Untuk n yang cukup besar

$$\frac{d\ln n!}{dn} \approx \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \ln\frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1) \approx \ln n$$

Dari hal tersebut:

$$\frac{d\ln W}{dn_1} = -\ln n_1 + \ln(N-n_1) + \ln p - \ln q$$

Derivasi pertama ini adalah nol dikala $n_1 = \tilde{n}_1$ (ketika W maksimum), jadi:

$$\ln\left[\frac{(N-\tilde{n}_1)}{\tilde{n}_1}\frac{p}{q}\right] = 0$$

$$\rightarrow \quad (N-\tilde{n}_1)p = \tilde{n}_1 q$$

$$\tilde{n}_1 = Np$$

(Seperti yang sudah dapat diduga sebelumnya).

Diferensiasi lebih lanjut:

$$\frac{d^2 \ln W}{dn_1^2} = -\frac{1}{n_1} - \frac{1}{N-n_1} \rightarrow \text{ ini merupakan nilai } B_2$$

dengan menggunakan $n_1 = \tilde{n}_1 = Np$, didapat:

$$B_2 = -\frac{1}{Np} - \frac{1}{N - Np} = -\frac{1}{N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$B_2 = -\frac{1}{Npq}$$

Sekali lagi untuk N yang besar:

$$\sum_{n_1=0}^{N} W(n_1) \approx \int_{-\infty}^{\infty} W(n_1 + \tilde{\eta})d\eta = 1$$

$$\tilde{W}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|B_2|\eta^2} dn = \tilde{W}\sqrt{\frac{2\pi}{|B_2|}} = 1$$

Akhirnya

$$W(n_1) = \sqrt{\frac{|B_2|}{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}|B_2|(n_1 - \tilde{n}_1)^2}$$

Disebut distribusi Gaussian yang merupakan hal yang umum dan sering ditemui di alam.

1.6. Distribusi Gaussian

Pada kasus distribusi binomial, kita kembalikan harga-harga B_2 dan $\tilde{n}_1$ yang sesuai, diperoleh:

$$W(n_1) = (2\pi Npq)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(n_1 - Np)^2}{2Npq}\right]$$

Kalau dalam nilai rata-rata dan dispersinya:

$$W(n_1) = [2\pi\overline{(\Delta n_1)^2}]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(n_1 - \tilde{n}_1)^2}{2(\Delta n_1)^2}\right]$$

Dalam besaran jumlah langkah m:

$$P(m) = W\left(\frac{N+m}{2}\right) = [2\pi Npq]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{[m - N(p-q)]^2}{8Npq}\right\}$$

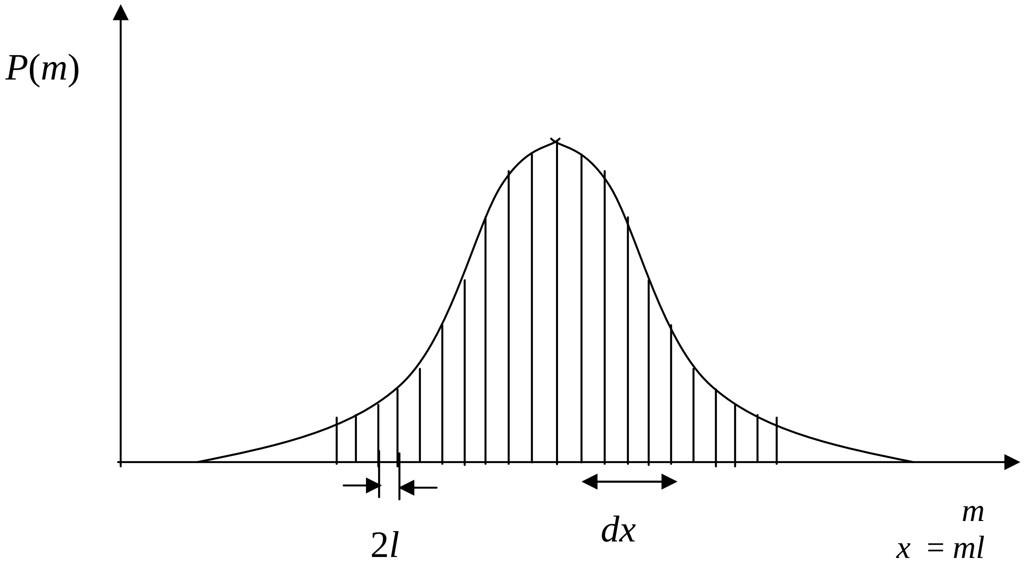
karena $n_1 - Np = ½ [N + m - 2Np] = ½ [m - N(p - q)]$. Disini m merupakan bilangan bulat yang dipisahkan oleh $\Delta m = 2$

Hasil ini juga dapat dinyatakan dalam variabel pergeseran yang sesungguhnya:

$x = ml$

disini l merupakan panjang setiap langkah.

Kalau l cukup kecil dibandingkan panjang besaran fisika yang diamati, maka x dapat dipandang fungsi kontinu. (Secara matematik murni x merupakan fungsi diskrit dengan penambahan $2l$).



Dari hal itu $P(m)$ dapat dianggap sebagai fungsi kontinu dari x.

Dapat dicari probabilitas mendapatkan partikel antara x dan $x+dx$:

$$\wp(x)\,dx = P(m)\,\frac{dx}{2l}$$

(Mengapa dibagi $2l$? $\rightarrow$ karena pada jangkauan dx berisi $dx/2l$ kemungkinan nilai m)

Besaran $\wp(x)$ yang independen dari besar dx disebut "kerapatan kemungkinan" (*probability density*).

Seterusnya:

$$\wp(x)\quad dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

disini telah digunakan penyingkatan:

$$\mu \equiv (p-q)\,Nl$$

$$\sigma \equiv 2\sqrt{Npq}l$$

Dengan menggunakan persamaan terakhir ini kita dapat secara umum menghitung harga rata-rata $\bar{x}$ dan $\overline{(x-\bar{x})^2}$

Sekarang kita cek dahulu apakah $\wp(x)$ telah ternormalisasi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \wp(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}dy \quad \text{(dimisalkan } y = x - \mu\text{)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{\pi 2\sigma^2}$$

$= 1$ → telah ternormalisasi dengan baik

Sekarang kita hitung harga rata-rata:

$$\bar{x} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x\,\wp(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2/2\sigma^2}dy + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2}dy\right]$$

$$= \mu$$

Selanjutnya

$$\overline{(x-\mu)^2} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\wp(x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2\sigma^2}dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(2\sigma^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \sigma^2$$

Jadi

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x-\mu)^2} = \sigma^2$$

Jelas terlihat bahwa σ merupakan nilai rms dari deviasi *x*.

Hubungan dengan jalan random:

$$\bar{x} = (p-q)Nl$$

$$\overline{(\Delta x)^2} = 4Npql^2$$

Pelajari sendiri mengenai gerak jalan random secara umum dalam 2 dimensi.

Soal-soal Latihan:

1.1. Apabila tiga dadu dilemparkan sekaligus, berapa kemungkinan mendapatkan nilai total enam atau kurang?

1.2. Dalam pelemparan dua dadu pada saat bersamaan, hitung peluang untuk mendapatkan setidaknya satu angka lima keluar.

1.3. Perhatikan suatu permainan dengan 6 buah dadu bersisi 6 digunakan (dengan biji 1 s/d 6). Hitung kemungkinan mendapatkan:
(a). Semuanya berbiji 1
(b). Setidaknya satu dadu berbiji 1

1.4. Pada gerak random walk sebuah partikel (ke kanan dan ke kiri), dilakukan 6 langkah total dengan kemungkinan melangkah ke kanan sebesar ¾. Tiap langkah berjarak 2 cm. Hitung kemungkinan mendapatkan partikel ini pada posisi akhir 4 cm di kanan titik asal.

1.5. Tinjau *N*o molekul gas yang tidak berinteraksi berada pada bejana tertutup dengan volume *V*o. Perhatikan pada sebarang sub-volume *V* yang ada dalam bejana terdapat *N* molekul. Setiap molekul memiliki peluang yang sama berada dimana saja dalam bejana, sehingga kemungkinan sebuah molekul berada dalam sub-volume *V* secara sederhana dapat dinyatakan sebagai *V*/*V*o.
(a). Hitung jumlah rata-rata $\overline{N}$ molekul yang berada di *V*? Nyatakan jawaban dalam *V*o, *V*o, dan *V*.
(b). Hitunglah dispersi relatif $\overline{(N-\overline{N})^2}/\overline{N}^2$ dalam jumlah molekul yang berada di *V*. Nyatakan jawaban dalam $\overline{N}$, *V*, dan V_o.
(c). Anggap sub-volume *V* dangat kecil sehingga 0 << V/V_o << 1, hitung kemungkinan jumlah molekul dalam volume ini antara *N* dan *N* + *dN*.

1.6. Probabilitas *W*(*n*) yang menunjukkan karakteristik suatu kemungkinan *p* terjadi *n* kali pada *N* kali adalah sbb:

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n}$$

Tinjau situasi ketika *p* sangat kecil (*p* << 1) dan ketika *n* << *N*. Beberapa penyederhanaan dapat dilakukan:
(a). Gunakan pendekatan ln $(1-p) \approx -p$, tunjukkan bahwa $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$
(b). Tunjukkan bahwa $N!/(N-n)! \approx N^n$
(c). Dari hal tersebut, tunjukkan $W(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Distribusi semacam ini disebut "distribusi Poisson" dengan $\lambda = Np$ merupakan jumlah kejadian.
(d). Tunjukkan bahwa distribusi Poisson ini ternormalisasi!
(e). Hitung $\overline{n}$ dan $\overline{(\Delta n)^2} = \overline{(n-\overline{n})^2}$ pada distribusi Poisson!

1.7. Kemungkinan menemukan sebuah partikel antara x dan $x + dx$ adalah

$P(x)\, dx = A\, e^{-\alpha\,|x|}\, dx$ dengan A dan α merupakan konstanta

(a). Tunjukkan bahwa α harus positif supaya $P(x)\, dx$ mempunyai makna!
(b). Carilah hubungan antara A dan α supaya $P(x)$ ternormalisir.
(c). Hitung $\overline{x}$
(d). Bila $\overline{x^2}$ = ¼ hitung A dan α!

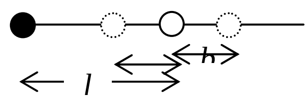
1.8. Perhatikan kasus jalan random satu dimensi, kemungkinan pergeseran antara s dan $s+ds$ adalah:

$w(s)\, ds = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-(s-l)^2/2\sigma^2}\, ds$ setelah N langkah.

(a). Hitung pergeseran rata-rata $\overline{x}$ dari origin!
(b). Hitung dispersi $\overline{(x-\overline{x})^2}$!

1.9. Perhatikan jalan random untuk sebuah partikel dalam satu dimensi. Anggab bahwa setiap langkah selalu positif dan mempunyai peluang yang sama dalam jangkauan l-b and l+b dengan b<l. Setelah N langkah hitunglah

(a). pergeseran rata-rata dari origin $\overline{x}$?
(b). dispersi $\overline{(x-\overline{x})^2}$?



1.10. Tinjau problem jalan random dengan p=q dan kita simbolkan $m = n_1$-n_2 merupakan jumlah pergeseran (net) langkah ke kanan. Setelah N langkah hitunglah harga rata-rata berikut: $\overline{m}$, $\overline{m^2}$, $\overline{m^3}$ dan $\overline{m^4}$

1.11. Tinjau problem gerak jalan random dalam satu dimensi dan anggap kemungkinan pergesaran tunggal antara s dan $s + ds$ adalah

$$w(s)ds = \frac{1}{\pi}\frac{1}{b^2 + s^2}ds$$

Hitung probabilitas $P(x)dx$ sehingga pergeseran total setelah N langkah terletak antara x dan $x + dx$.