2. Deskripsi Statistik Sistem Partikel

- Formulasi statistik
- Interaksi antara sistem makroskopis

2.1. Formulasi Statistik

Dalam menganalisis suatu sistem, kombinasikan:
- ide tentang statistik
- pengetahuan hukum-hukum mekanika partikel (klassik dan kuantum)

Urutan langkah:
1. Spesifikasi keadaan sistem
2. Ensemble statistik
3. Postulat dasar
4. Perhitungan probabilitas

Supaya lebih jelas perhatikan untuk kasus sederhana pelemparan dadu:

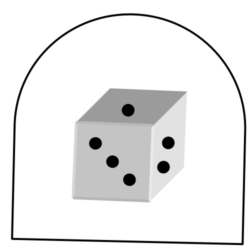
1. Spesifikasi keadaan sistem

Dibutuhkan metode yang mendetail untuk menjelaskan hasil setiap eksperimen.

Apa sebenarnya yang ingin diketahui dalam proses pelemparan dadu?→ kondisi awal? kondisi akhir?

2. Ensemble statistik

Proses mendetail
vs.
ensemble statistik



Fokus pada kondisi keseluruhan (ensemble) dari segala macam peristiwa individual yang mungkin.

3. Postulat dasar

Pada kasus dadu → tidak ada preferensial antara satu muka dengan muka yang lain.

Dalam hal ini hukum-hukum Mekanika perlu dilihat.

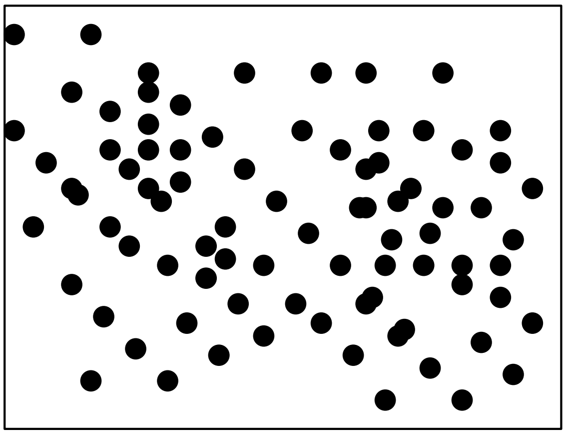
4. Perhitungan probabilitas

Dari postulat dasar, perhitungan probabilitas dapat dilakukan

Contoh-contoh Formulasi Statistik pada Problem Mekanika

Sekarang kita masuki beberapa problem real di fisika.

1. Spesifikasi Keadaan Sistem



Sistem ini dapat terdiri dari elektron-elektron, atom-atom, atau molekul-molekul.
→ dapat dideskripsikan dengan kaidah mekanika kuantum

Sistem dapat dijelaskan

$\Psi(q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots . q_f)$ → fungsi dari f koordinat (termasuk spin)

Bilangan f merupakan derajat kebebasan sistem

Contoh 1:

Sistem yang terdiri dari partikel tunggal dengan posisi tetap tetapi memiliki spin ½ (yakni momentum angular intrinsik $½\hbar$)
→
Dalam deskripsi mekanika kuantum, keadaan partikel ini dispesifikasi oleh proyeksi spin pada sumbu tetap (misal z)

Keadaan kuantum

Contoh 2:

Kalau ada N partikel pada posisi tetap.
Keadaan seluruh sistem dapat dinyatakan dengan bilangan kuantum $m_1, m_2, m_3, \ldots . m_N$

(m bisa ½ atau -½)

Contoh 3:

Suatu sistem yang terdiri dari harmonik osilator sederhana satu dimensi.

Keadaan kuantum yang mungkin memiliki energi:

$E_n = (n + ½)\hbar\,\omega$

disini n = 0,1,2,3,4,….

Contoh 4:

Partikel tanpa spin dalam kotak

$0 \le x \le L_x$
$0 \le y \le L_y$
$0 \le z \le L_z$

→ memenuhi persamaan Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = E\psi$$

Fungsi gelombang yang memenuhi syarat batas:

$$\psi = \sin(\pi\frac{n_x x}{L_x})\sin(\pi\frac{n_y y}{L_y})\sin(\pi\frac{n_z z}{L_z})$$

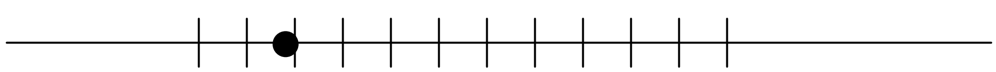
Menghasilkan energi yang memenuhi

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}+\frac{n_z^2}{L_z^2}\right)$$

→ Keadaan partikel dapat dispesifikasi oleh tiga bilangan kuantum.

Bagaimana dari segi pandang Mekanika Klassik??

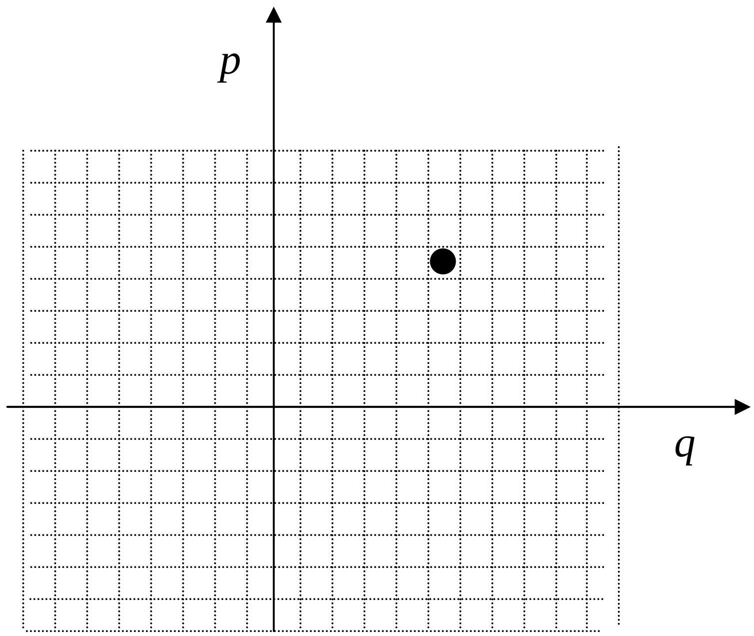
Kita mulai dengan contoh satu partikel dalam satu dimensi



→ sistem dapat dijelaskan secara komplit kalau diketahui posisi dan momentumnya (q dan p).

(Ide ini tidak benar dipandang dari Mekanika Kuantum karena adanya ketidakpastian Heisenberg)

Dapat digambarkan dalam ruang fasa sbb:



Misal skala q dapat dibagi-bagi menjadi skala terkecil δq, sedangkan skala p terkecil δp. Sehingga area terkecil dua dimensi:

$$\delta q\ \delta p = h_o$$

Keadaan sistem dapat dijelaskan dengan koordinat ruang yang berada dalam interval q dan $q + dq$ dan momentum antara p dan $p+dp$.

Hal ini dapat diperumum dengan f koordinat ruang $q_1, q_2, q_3, \ldots . q_f$ dan f momentum $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_f$

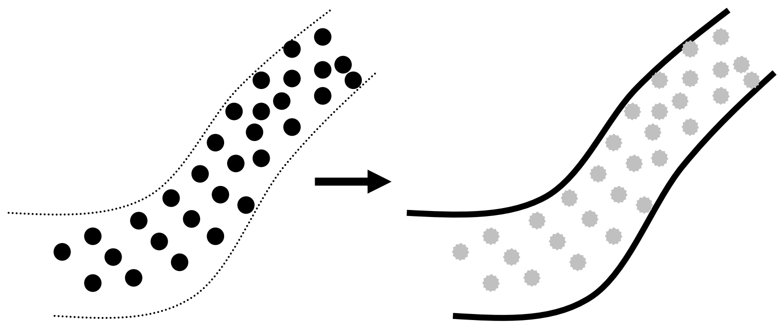
Cara perhitungan keadaan mikroskopik atau "microstate":

Secara kuantum:
Hitung dengan suatu cara yang mudah semua keadaan kuantum yang mungkin, beri label r =1,2,3,.....
Keadaan sistem dapat dideskripsikan dengan melihat kondisi yang diinginkan (misal keadaan khusus r).

Bila dibutuhkan pendekataan mekanika klassik:
Situasi serupa terjadi
$\rightarrow$ Setelah ruang fasa dibagi-bagi dalam suatu unit kecil yang sama, kita dapat menghitung sel-sel tersebut dan memberi indeks dengan r =1,2,3,...
Keadaan sistem dapat dideskripsikan dengan menspesifikasi sel r yang mewakili titik-titik dalam sistem.

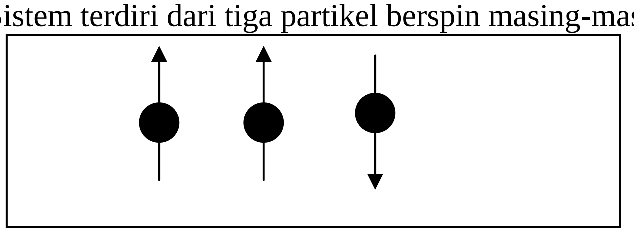
2. Ensemble statistik

Disini kita tidak berfokus pada satu sistem (atau partikel) terisolasi tetapi pada sejumlah besar sistem identik. Tujuan bahasan ini untuk meramalkan kemungkinan yang terjadi secara keseluruhan (*ensemble*).



Contoh:

Sistem terdiri dari tiga partikel berspin masing-masing ½



Momen magnetik:
$+\mu$ bila “up” ke sumbu z
$-\mu$ bila “down” thd ke sumbu z

Sistem mendapatkan medan magnet eksternal H ke arah sumbu z.
Keadaan seluruh sistem dapat dideskripsikan oleh tiga bilangan kuantum m_1, m_2, dan m_3.

Partikel memiliki energi $-\mu H$ untuk spin “up” dan $+\mu H$ untuk spin “down” (Mengapa terbalik??).

Keadaan Indeks r	Bilangan Kuantum m_1, m_2, m_3	Momen Magnetik Total	Energi Total
1	+ + +	3μ	$-3\mu H$
2	+ + –	μ	$-\mu H$
3	+ – +	μ	$-\mu H$
4	– + +	μ	$-\mu H$
5	+ – –	$-\mu$	μH
6	– + –	$-\mu$	μH
7	– – +	$-\mu$	μH
8	– – –	-3μ	$3\mu H$

Biasanya pengetahuan parsial tentang sistem dapat diketahui. Seperti misalnya energi total atau volume gas.

→ Sistem hanya boleh berada dalam keadaan yang sesuai dengan informasi ini.

Pada kasus di atas, seandainya ada informasi bahwa sistem memiliki energi $-\mu H$, maka keadaan yang mungkin adalah salah satu diantara:

(+ + –); (+ – +) atau (– + +)

Tentu saja kita tidak tahu keadaan mana yang sesungguhnya.

Keadaan yang mungkin ini disebut *accessible state*.

3. Postulat dasar

Dibutuhkan postulat dasar sekitar probabilitas relatif untuk menemukan sistem dalam keadaan yang dapat dijangkau (*accessible state*).

Biasanya digunakan postulat:

- sistem terisolasi
  - → tidak ada pertukaran energi
  - → energi total terkonservasi
- sistem dalam keadaan keseimbangan
  - → time independent untuk parameter makroskopis

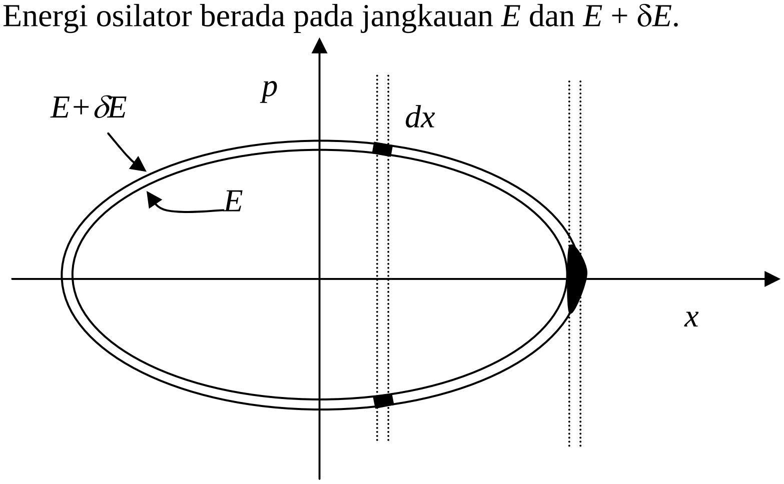
Postulat fundamental:
Suatu sistem terisolasi dalam keadaan keseimbangan memiliki peluang sama berada dalam *accessible states.*

Contoh kembali untuk $E = -\mu H$, maka sistem berpeluang sama berada dalam keadaan (+ + –); (+ – +) atau (– + +)

Contoh lain: Kasus osilator harmonis

$$E = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}kx^2 \rightarrow \text{konstan}$$

Energi osilator berada pada jangkauan E dan $E + \delta E$.

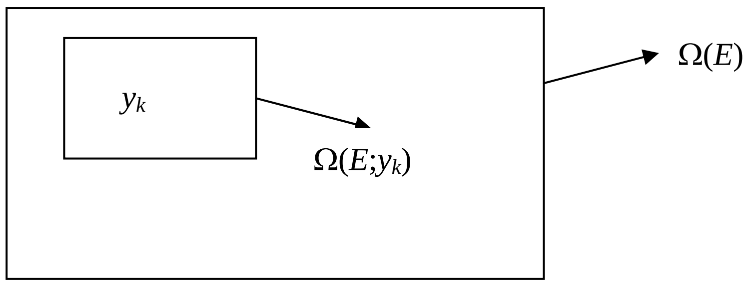


What’s the picture describing you?

4. Perhitungan Probabilitas

Sekarang kita masuk ke perhitungan kemungkinan

Pada jangkauan energi E dan $E + \delta E$ terdapat:



$\Omega(E)$ → jumlah total keadaan pada jangkauan ini.
$\Omega(E;\, y_k)$ → jumlah keadaan pada kondisi parameter y_k.

Kemungkinan $P(y_k)$ parameter y memiliki nilai y_k:

$$P(y_k) = \frac{\Omega(E; y_k)}{\Omega(E)}$$

dan nilai rata-rata:

$$\bar{y} = \frac{\sum_k \Omega(E; y_k) y_k}{\Omega(E)}$$

Contoh:
Untuk $E = -\mu H$, maka sistem berpeluang sama berada dalam keadaan (+ + –); (+ – +) atau (– + +)

Sekarang kita perhatikan spin yang pertama

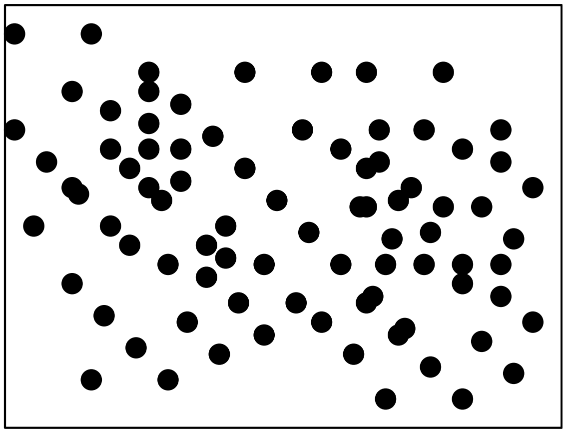
Kemungkinan spin ini "up":

$$P_+ = \tfrac{2}{3}$$

Berapakah momen magnetik rata-rata pada arah ini?

$$\bar{\mu}_z = \tfrac{1}{3}\mu + \tfrac{1}{3}\mu - \tfrac{1}{3}\mu = \tfrac{1}{3}\mu$$

Perhitungan jumlah keadaan pada gas ideal secara klassik:



N molekul identik pada volume V.

Energi sistem:

$E = E_k + U + E_{\mathrm{intra}}$

gerakan intramolekular → 0 (monatomik)

potensial

kinetik

$$E_k = E_k(p_1, p_2, p_3, \ldots p_N) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

$U = U(r_1, r_2, r_3, \ldots r_N)$ → 0 untuk gas ideal

Jumlah keadaan $\Omega(E)$ pada energi antara E dan $E + \delta E$:
→ jumlah unit sel volume yang berada diantaranya:

$$\Omega(E) \propto \int_E^{E+\delta E} \ldots\ldots \int d^3 r_1 \ldots d^3 r_N \, d^3 p_1 \ldots\ldots d^3 p_N$$

Jelas bahwa $\int d^3 r_i = V$, maka

$\Omega(E) \propto V^N \chi(E)$

dengan

$$\chi(E) = \int_E^{E+\delta E} \ldots\ldots \int d^3 p_1 \ldots\ldots d^3 p_N$$ → independen dari V.

Kalau sekarang digunakan:

$$2mE = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3} p_{i\alpha}^2$$

diperoleh:

$\chi(E) = E^{3N/2}$ (*proof it as exercise*)

Sehingga jumlah keadaan menjadi: $\Omega(E) = B\, V^N E^{3N/2}$

disini B merupakan konstanta.

2.2. Interaksi antar Sistem Makroskopis

→ Pelajari kembali Termodinamika

Seperti:

- Kerja pada suatu proses dengan volume berubah:

  $d'W = P\, dV$

- Pernyataan hukum Termodinamika I dalam bentuk diferensial:

  $d'Q = d'W + dU$

- Proses Quasi-statik

- Diferensial eksak

(Lihat catatan kuliah Termodinamika halaman 21 dst.)

Soal-soal Latihan.

2.1. Tinjau osilator harmonis klassik yang terdiri dari massa m dan konstanta pegas k memiliki energi total E. Carilah fungsi kerapatan probabilitas $P(x)$, bila $P(x)dx$ merupakan kemungkinan menemukan massa pada interval x dan $x+dx$.

2.2. Sejumlah besar N partikel terlokalisir berada dalam pengaruh medan magnet luar **H** (arah z). Setiap partikel memiliki spin ½. Carilah jumlah keadaan yang dapat dijangkau (*accessible states*) pada sistem sebagai fungsi Ms (jumlah total spin pada komponen z). Tentukan nilai M_s sehingga jumlah keadaan adalah maksimum!

2.3. Gunakan fungsi gamma, tunjukkan secara eksplisit bahwa $\chi(E) = E^{3N/2}$