

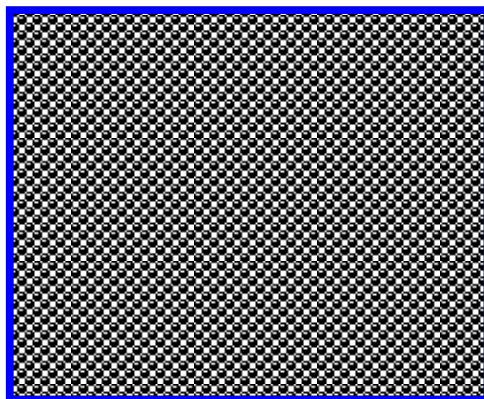
## 7. Statistika Kuantum

Pada bagian ini akan didiskusikan pembahasan sistem dengan interaksi antar molekul lemah ('gas ideal') secara mekanika kuantum.

- Formulasi problem statistik
- Fungsi distribusi kuantum
- Klasifikasi Sistem Partikel
- Fermion dan Boson pada Fisika Partikel
- Statistik Maxwell-Boltzmann
- Statistik foton
- Statistik Bose-Einstein
- Statistik Fermi-Dirac
- Radiasi benda hitam
- Konduksi elektron dalam metal

### 7.1. Partikel Identik dan Simetri yang Diperlukan

Gas terdiri dari  $N$  partikel dalam volume  $V$ :



Sebut:

$Q_i$  koordinat gabungan (posisi dan spin) partikel ke- $i$   
 $s_i$  keadaan kuantum partikel ke- $i$

Keadaan seluruh gas:

$$\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$$

dengan fungsi gelombang pada keadaan ini:

$$\Psi = \Psi_{[s_1, s_2, s_3, \dots]}(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N)$$

### 7.1.1. Klasifikasi Sistem Partikel

Beberapa kasus:

#### A. Kasus “Klassik” (Statistik Maxwell Boltzmann)

Dalam kasus ini (Statistik MB)

- partikel dapat dibedakan (*distinguishable*)
- berapa pun jumlah partikel dapat menempati keadaan tunggal  $s$  yang sama
- tidak ada simetri yang dibutuhkan ketika dua partikel ditukar

#### B. Deskripsi Mekanika Kuantum

- Simetri jelas dibutuhkan ketika terjadi pertukaran partikel
- Partikel secara intrinsik tidak dapat dibedakan (*indistinguishable*)
- Dapat terjadi pembatasan untuk menempati keadaan tertentu

Karena keadaan simetri ini, keadaan kuantum erat hubungannya dengan spin partikel:

(a) Spin bulat (*integral spin*)

(b) Spin setengah (*half integral spin*)

Dengan demikian statistika mekanika kuantum terbagi dua:

#### (a) Partikel dengan Spin bulat (Statistik Bose-Einstein)

- Setiap partikel memiliki momentum angular spin total (diukur dalam unit  $\hbar$ ) bilangan bulat: 0, 1, 2, 3, 4,...
- Fungsi gelombang total bersifat simetri, yakni

$$\Psi(\dots Q_j \dots Q_i \dots) = \Psi(\dots Q_i \dots Q_j \dots)$$



- Tidak dapat dibedakan → setiap pertukaran partikel tidak menghasilkan keadaan baru

#### (b) Partikel dengan Spin kelipatan $\frac{1}{2}$ (Statistik Fermi-Dirac)

- Setiap partikel memiliki momentum angular spin total (diukur dalam unit  $\hbar$ ) kelipatan  $\frac{1}{2}$  yakni  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$
- Fungsi gelombang total bersifat antisimetri, yakni

$$\Psi(\dots Q_j \dots Q_i \dots) = -\Psi(\dots Q_i \dots Q_j \dots)$$

- Tidak dapat dibedakan

→ Karena sifat antisimetri dan partikel *indistinguishable* maka dua atau lebih partikel tidak mungkin pada keadaan yang sama.

→ Prinsip eksklusi Pauli

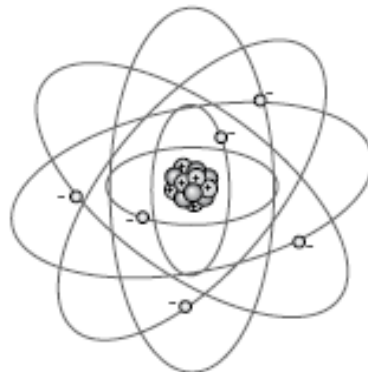
Resumé:

Klassik	Kuantum	
Maxwell-Boltzmann	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
Distinguishable	indistinguishable, spin: 0,1,2,3,4,...	indistinguishable spin: $\frac{1}{2}$ , $\frac{3}{2}$ , ....
Tak ada simetri	Simetri	antisimetri
Tak ada batasan jumlah menempati satu keadaan	Tak ada batasan jumlah menempati satu keadaan	Prinsip eksklusi Pauli
	contoh: Foton, He <sup>4</sup>	contoh: Elektron, He <sup>3</sup>

Dalam perkembangan lebih lanjut generalisasi dari fermion dan boson dinamakan *anyon*, disini spin tidak selalu kelipatan ganjil atau genap dari 1/2. Fenomena ini teramati cukup jelas di condensed matter, namun tidak akan dibahas di kuliah Fisika Statistik.

### 7.1.2. Kaitan Fermion dan Boson pada Fisika Partikel

Dalam kaitan dengan Fisika Partikel, Boson (dari Bose-Einstein) adalah partikel interaksi –yakni pembawa interaksi/gaya menurut teori Medan Kuantum–, sementara Fermion (dari Fermi-Dirac) adalah partikel materi, Fermion lebih ‘padat’.



Model Standar Fisika partikel meramalkan adanya lima Boson fundamental yaitu

- Foton
- Gluon (ada 8 tipe)
- Boson-Z
- Boson-W (ada dua macam yakni  $W^-$  dan  $W^+$ )
- Boson Higgs (terkonfirmasi 99,9999% pada tanggal 4 juli 2012 di CERN)

Tanggal 4 Juli 2012: partikel Higgs dijumpai pada tingkat 5 sigma di wilayah massa sekitar 126 GeV. Itu berarti kepastian penemuan partikel baru mencapai 99,9999%. "Ini memang partikel baru. Kami tahu itu boson dan itu boson terberat yang pernah ditemukan," kata Joe Candela, jurubicara CERN

Lebih lanjut, beberapa fisikawan percaya bahwa ada kemungkinan boson bernama graviton yang berkaitan dengan gravitasi.

Boson-boson komposit dapat juga terjadi; hal ini terbentuk dengan kombinasi jumlah genap beberapa fermion. Contoh, atom carbon-12 terdiri dari 6 proton dan 6 neutron, semuanya fermion. Inti atom carbon-12, oleh karena itu, merupakan boson komposit. Meson, di lain pihak, adalah partikel yang terbuat secara eksak dari 2 quark, oleh karena itu meson juga boson komposit.

Sebagaimana yang sudah disebutkan sebelumnya, Fermion adalah partikel yang mempunyai nilai spin kuantum setengah bilangan bulat. Tidak seperti boson, fermion memenuhi prinsip eksklusi Pauli yang berarti fermion-fermion tidak mungkin berada pada bilangan kuantum yang sama. Sementara boson dipandang sebagai partikel perantara gaya-gaya di alam, fermion dipandang sebagai partikel “lebih padat” atau partikel-materi.

Terdapat dua famili partikel-materi fundamental yang merupakan fermion yaitu quark dan lepton, keduanya merupakan partikel elementer yang tidak bisa dipecah (sejauh yang diketahui oleh saintis) menjadi partikel lebih kecil. Elektron merupakan lepton, namun Model Standar Fisika Partikel menunjukkan adanya tiga generasi partikel, masing-masing lebih berat dari sebelumnya. (Tiga generasi partikel ini diprediksi dengan teori sebelum mereka ditemukan dengan eksperimen, ini contoh yang sangat bagus bagaimana teori meramalkan eksperimen dalam teori medan kuantum.)

Pada tiap generasi terdapat dua flavor quark. Tabel berikut menunjukkan 12 tipe fermion fundamental, semuanya telah dapat diobservasi.

Table: Famili Partikel Elementer untuk Fermion

	<i>Quarks</i>		<i>Leptons</i>	
<b>First Generation</b>	Up Quark 3 MeV	Down Quark 7 MeV	Electron Neutrino	Electron 0.5 MeV
<b>Second Generation</b>	Charm Quark 1.2 GeV	Strange Quark 120 MeV	Muon Neutrino	Muon 106 MeV
<b>Third Generation</b>	Top Quark 174 GeV	Bottom Quark 4.3 GeV	Tau Neutrino	Tau 1.8 GeV

Catatan: neutrino mempunyai massa kecil sekali (praktis tidak punya massa).

Tentu saja terdapat fermion komposit terbuat dari jumlah ganjil fermion menjadikan partikel baru, seperti proton dan neutron.

Pada perkembangan Model Standar Fisika Partikel, telah menjadi jelas bahwa gaya-gaya (Fisikawan lebih suka dengan istilah interaksi) dalam Fisika dapat dipecah menjadi empat fundamental:

- Electromagnetism
- Gravity

- Weak nuclear force
- Strong nuclear force

Gaya elektromagnetik dan interaksi inti lemah pada tahun 1960 disatukan oleh Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam, dan Steven Weinberg menjadi gaya tunggal disebut *electroweak force*. Gaya ini dikombinasi dengan quantum chromodynamics (yang mendefinisikan gaya inti kuat) adalah yang dimaksud oleh para Fisikawan ketika berbicara tentang Model Standar Fisika Partikel.

Salah satu elemen kunci Model Standar Fisika Partikel adalah *gauge theory* yang berarti terdapat tipe-tipe simetri yang inherent berada dalam teori; dengan perkataan lain dinamika sistem tetap sama pada suatu tipe transformasi. Suatu gaya berkerja melalui medan gauge ditransmisi dengan suatu *gauge boson*. Berikut ini *gauge boson* yang telah diamati untuk tiga tipe gaya di alam:

- Electromagnetism — photon
- Strong nuclear force — gluon
- Weak nuclear force — Z, W<sup>+</sup>, and W<sup>-</sup> bosons

Lebih lanjut, gravitasi juga dapat dituliskan dalam suatu *gauge theory*, yang berarti harus ada *gauge boson* yang menjadi perantara gravitasi. Nama teoritis *gauge boson* ini adalah *graviton*.

Catatan tentang spin: foton, gluon, Z, dan W mempunyai spin 1, Higgs boson berspin 0, sementara partikel-partikel fermion (quark, lepton, neutrino) semua berspinnya 1/2. Graviton -jika terdeteksi- akan berspin 2. Standard Model tidak memiliki partikel fundamental dengan spin 3/2

### 7.1.3. Contoh Perhitungan Probabilitas

Sekarang kembali ke Fisika Statistik, supaya jelas tinjau kasus 2 partikel dengan keadaan kuantum yang mungkin ada tiga  $s = 1, 2, 3$ .

Maxwell-Boltzman:

1	2	3
AB	...	...
...	AB	...
...	...	AB
A	B	...
B	A	...
A	...	B
B	...	A
...	A	B
...	B	A

Bose-Einstein:

1	2	3
AA	...	...
...	AA	...
...	...	AA
A	A	...
A	...	A
...	A	A

Fermi Dirac:

1	2	3
A	A	...
A	...	A
...	A	A

Bila didefinisikan:

$$\xi = \frac{\text{probabilitas menemukan partikel pada keadaan sama}}{\text{probabilitas menemukan partikel pada keadaan berbeda}}$$

Maka:

$$\xi_{MB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \xi_{BE} = \frac{3}{3} = 1 \quad ; \quad \xi_{FD} = \frac{0}{3} = 0$$

Arti fisis?

Partikel BE memiliki tendensi lebih besar untuk berada pada keadaan yang sama dibandingkan partikel klasik. Partikel FD memiliki tendensi untuk berbeda satu sama lain.

Formulasi Problem Statistik:

- Beri label keadaan kuantum yang mungkin  $\rightarrow r$
- Nyatakan energi partikel pada keadaan  $r$  dengan  $\varepsilon_r$
- Nyatakan jumlah partikel pada keadaan  $r$  dengan  $n_r$
- Beri label semua keadaan yang mungkin dengan  $R$

Bila interaksi lemah, maka energi bersifat aditif:

$$E_R = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3 + \dots = \sum_r n_r \varepsilon_r$$

dan bila jumlah partikel diketahui maka:

$$\sum_r n_r = N$$

Untuk mengetahui sifat-sifat makroskopis (seperti entropi), fungsi partisi dapat dihitung:

$$Z = \sum_R e^{-\beta E_R} = \sum_R e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}$$

dan seterusnya harga rata-rata jumlah partikel, dispersi dll. juga dapat dirumuskan:

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_R n_s e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 + \dots)}}$$

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_s}$$

Perhitungan dispersi:

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \overline{(n_s - \bar{n}_s)^2} = \overline{n_s^2} - \bar{n}_s^2$$

$$\overline{n_s^2} = \frac{\sum_R n_s^2 e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}}{\sum_R e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}}$$

sehingga:

$$\overline{n_s^2} = \frac{1}{Z} \sum \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \right) \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \right) e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}$$

$$= \frac{1}{Z} \left( -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \right)^2 Z$$

atau

$$\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2 Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varepsilon_s^2}$$

$$\overline{n_s^2} = \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \left( \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_s} \right) + \frac{1}{Z^2} \left( \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon_s} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_s} \right) + \beta^2 \bar{n}_s^2 \right]$$

seterusnya:

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \varepsilon_s^2}$$

dapat juga ditulis:

$$\overline{(\Delta n_s)^2} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{n}_s}{\partial \varepsilon_s}$$

## 7.2. Fungsi Distribusi Kuantum

Harga rata-rata jumlah partikel:

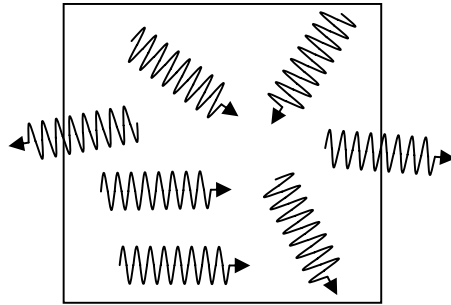
$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_1, n_2, \dots} n_s e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots + n_s \varepsilon_s + \dots)}}{\sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots + n_s \varepsilon_s + \dots)}}$$

dapat ditulis:

$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \varepsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \varepsilon_s} \sum_{n_1, n_2, \dots}^{(s)} e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}}$$

### 7.2.1. Statistika Foton

→ Termasuk Bose-Einstein tanpa pembatasan jumlah partikel



$$\bar{n}_s = \frac{\sum_{n_s} n_s e^{-\beta n_s \varepsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}}$$

$$\bar{n}_s = \frac{(-1/\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n_s} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}}{\sum_{n_s} e^{-\beta n_s \varepsilon_s}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln(e^{-\beta n_s \varepsilon_s})$$

jumlah terakhir ini merupakan deret geometri tak berhingga:

$$\sum e^{-\beta n_s \varepsilon_s} = 1 + e^{-\beta \varepsilon_s} + e^{-2\beta \varepsilon_s} + e^{-3\beta \varepsilon_s} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_s}}$$

menghasilkan:

$$\bar{n}_s = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_s}) = \frac{e^{-\beta \varepsilon_s}}{1 - e^{-\beta \varepsilon_s}}$$

dapat ditulis:

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_s} - 1}$$

→ sering disebut sebagai “distribusi Planck”.



Tanpa kesulitan, fungsi partisi statistika foton dapat ditulis:

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+\dots)}$$

$$= \left( \sum_{n_1=0} e^{-\beta(n_1\varepsilon_1)} \right) \left( \sum_{n_2=0} e^{-\beta(n_2\varepsilon_2)} \right) \left( \sum_{n_3=0} e^{-\beta(n_3\varepsilon_3)} \right) \dots$$

karena  $\sum e^{-\beta n_s \varepsilon_s} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \varepsilon_s}}$

maka  $\ln Z = -\sum_r \ln(1 - e^{-\beta \varepsilon_r})$

### 7.2.2. Statistik Maxwell-Boltzmann

Pada kasus klasik statistik Maxwell-Boltzmann, fungsi partisi:

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+\dots)}$$

jumlah untuk semua keadaan partikel dengan juga mempertimbangkan bahwa partikel dapat dibedakan → perhatikan permutasi yang mungkin

Sehingga untuk  $N$  partikel:

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} e^{-\beta(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+\dots)}$$

disini  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  dengan restriksi:

$$\sum_r n_r = N$$

Fungsi partisi dapat ditulis:

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots} (e^{-\beta\varepsilon_1})^{n_1} (e^{-\beta\varepsilon_2})^{n_2} (e^{-\beta\varepsilon_3})^{n_3} \dots$$

yang tidak lain merupakan binomial Newton:

$$Z = (e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta\varepsilon_3} \dots)^N$$

atau  $\ln Z = N \ln \sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}$

seterusnya:

$$\bar{n}_s = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \varepsilon_s} = -\frac{1}{\beta} N \frac{-\beta e^{-\beta\varepsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}} = N \frac{e^{-\beta\varepsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}}$$

Persamaan terakhir  $\bar{n}_s = N \frac{e^{-\beta\varepsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta\varepsilon_r}}$  disebut sebagai “distribusi Maxwell-Boltzmann”

### 7.2.3. Statistik Bose-Einstein

Sekali lagi fungsi partisi diberikan oleh:

$$Z = \sum_R e^{-\beta(n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + \dots)}$$

dengan jumlah semua harga

$$n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ untuk setiap } r$$

Tidak seperti foton, disini ada restriksi:

$$\sum_r n_r = N$$

Pembatasan ini menyulitkan evaluasi nilai  $Z$ .

(See Reif page 346-348 for detail derivation)

Kita perkenalkan besaran  $\mathbf{Z}$  sedemikian rupa:

$$\mathbf{Z} = \sum_{N'} Z(N') e^{-\alpha N'}$$

secara pendekatan diperoleh:

$$\ln Z(N) = \alpha N + \ln \mathbf{Z}$$

seterusnya diperoleh: (Reif 348)

$$\ln Z = \alpha N - \sum_r \ln(1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_r}) ;$$

$$\sum_r \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_r} - 1} = N$$

dan

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_r} - 1}$$

→ disebut distribusi Bose-Einstein.

Hubungan antara potensial kimia  $\mu$  dan  $\alpha$ :

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -kT \frac{\partial \ln Z}{\partial N} = -kT \alpha$$

atau  $\alpha = -\beta \mu$

Pada kasus foton  $Z$  tidak tergantung  $N$  dan  $\alpha = 0$

#### 7.2.4. Statistik Fermi-Dirac

Dengan batasan  $n_r = 0$  dan 1 untuk setiap  $r$  diperoleh:

$$\sum_r \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_r} + 1} = N$$

$$\ln Z = \alpha N + \sum_r \ln(1 + e^{-\alpha-\beta\epsilon_r}) ;$$

dan

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_s} + 1}$$

→ disebut distribusi Fermi-Dirac

Resume:

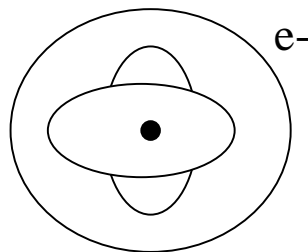
Nilai  $\bar{n}_s$  dan fungsi partisi untuk berbagai distribusi

	Maxwell-Boltzmann	Foton (Planck)	Bose-Einstein	Fermi-Dirac
$\bar{n}_s$	$N \frac{e^{-\beta\epsilon_r}}{\sum_r e^{-\beta\epsilon_r}}$	$\frac{e^{-\beta\epsilon_s}}{1 - e^{-\beta\epsilon_s}}$	$\frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_s} - 1}$	$\frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_s} + 1}$
f. partisi	$\ln Z = N \ln \sum_r e^{-\beta\epsilon_r}$	$\ln Z = - \sum_r \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_r})$	$\ln Z = \alpha N - \sum_r \ln(1 - e^{-\alpha-\beta\epsilon_r})$	$\ln Z = \alpha N + \sum_r \ln(1 + e^{-\alpha-\beta\epsilon_r})$

Pelajari topik: Radiasi benda hitam (Reif, p.381-388)

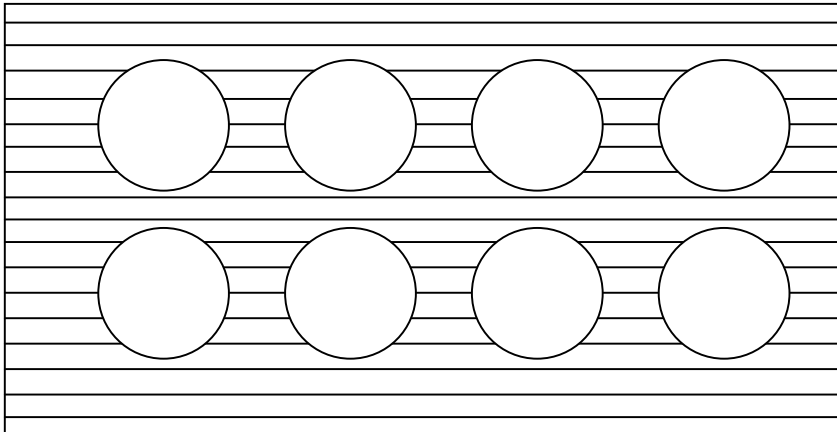
### 7.3. Konduksi Elektron dalam Zat Padat

Tinjau atom Natrium (11 elektron)



10 elektron menjadi 'core'.

Ketika atom-atom ini membentuk zat padat:



Core tetap berada di tempatnya, sedangkan elektron terluar menjadi ‘elektron bebas’.

Disini dapat dibedakan dua keadaan elektron:

- elektron *core* yang dapat dipandang terlokalisasi
- elektron valensi atau konduksi yang memiliki keadaan Bloch pada keseluruhan kristal

Beberapa fenomena fisis makroskopis seperti konduktivitas atau resistivitas dapat dijelaskan dengan melihat elektron konduksi.

→ Untuk pendekatan pertama, perilaku elektron ini dapat dipandang seperti gas ideal (berarti tidak ada interaksi dari luar atau sesamanya).

Namun karena konsentrasi elektron cukup tinggi, maka tidak dapat digunakan statistik klasik.

Statistik yang digunakan Fermi-Dirac.

Jumlah rata-rata partikel:

$$\bar{n}_s = \frac{1}{e^{\alpha + \beta \epsilon_s} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_F)} + 1}$$

disini telah digunakan

$$\epsilon_F \equiv -\frac{\alpha}{\beta} = -kT\alpha$$

besaran ini disebut “Energi Fermi” suatu sistem (terlihat bahwa besaran ini sama dengan  $\mu$ , potensial kimia gas).

Harga  $\epsilon_F$  dan  $\alpha$  ditentukan oleh kondisi:

$$\sum_s \bar{n}_s = \sum_s \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_s - \epsilon_F)} + 1} = N$$

$N$  : jumlah total partikel pada volume  $V$

Sekarang kita lihat perilaku “fungsi Fermi”:

$$F(\epsilon) \equiv \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1}$$

sebagai fungsi dari energi  $\epsilon$  (diukur dari energi terendah  $\epsilon = 0$ )

Sekarang kita perhatikan beberapa limit fisis:

Pada suhu tinggi atau kondisi  $\beta\epsilon_F \ll 1$ , maka  $e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} \gg 1$  fungsi distribusi  $F$  akan menjadi distribusi Maxwell-Boltzmann.

Pada kasus ini kita lebih tertarik pada kondisi sebaliknya, yakni

$$\beta\epsilon_F = \frac{\epsilon_F}{kT} \gg 1$$

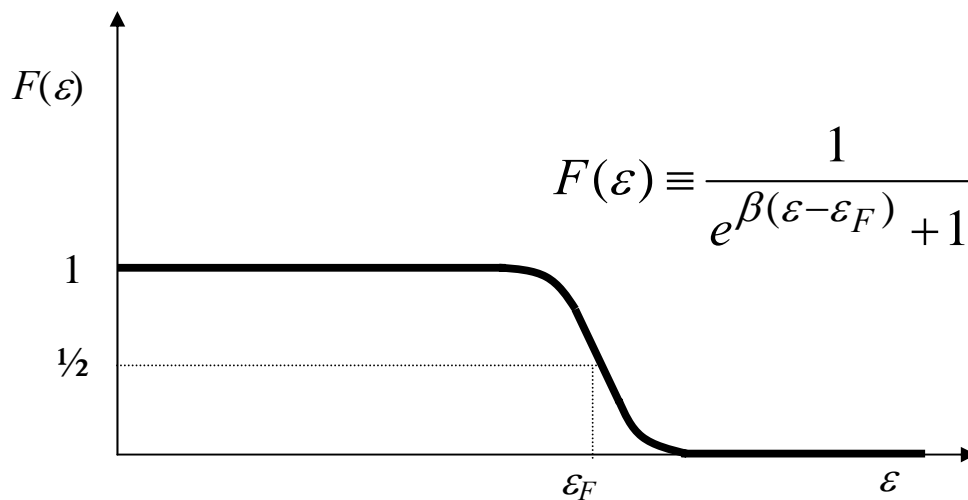
(makna fisis: bisa pada suhu rendah atau pada suhu kamar namun energi Fermi jauh lebih besar dibandingkan energi termal)

$$F(\epsilon) \equiv \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1}$$

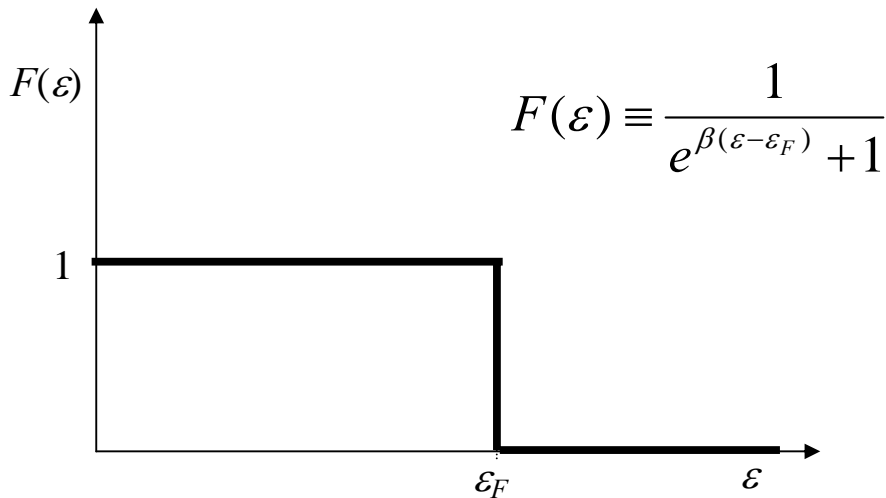
Disini masih ada tiga kasus ekstrim:

- (a) Bila  $\epsilon \ll \epsilon_F$  maka  $\beta(\epsilon - \epsilon_F) \ll 0$  sehingga  $F(\epsilon) = 1$
- (b) Bila  $\epsilon \gg \epsilon_F$  maka  $\beta(\epsilon - \epsilon_F) \gg 0 \rightarrow F(\epsilon)$  berperilaku seperti distribusi Boltzmann
- (c) Bila  $\epsilon = \epsilon_F$  maka  $F(\epsilon) = 1/2$

Secara skematik dapat digambarkan sbb:



Bila pada suhu ekstrim rendah  $T \rightarrow 0$  dengan perkataan lain  $\beta \rightarrow \infty$ . kondisi dapat digambarkan:

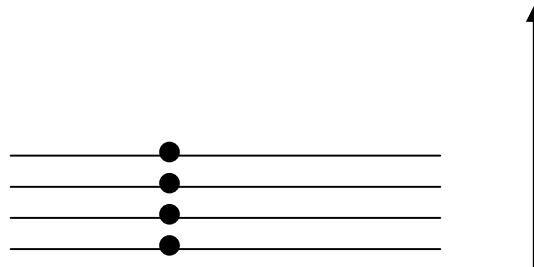


Mengapa bisa demikian?

→ cukup jelas secara matematis

→ secara fisis???

Pada suhu  $T = 0$  semua partikel berada pada ground state (keadaan dasar) dengan energi terendah. Namun karena prinsip eksklusi Pauli yang tidak memperkenankan partikel dalam keadaan sama, maka partikel-partikel “menumpuk” mengisi keadaan dasar yang mungkin sampai semua partikel terakomodasi.



Jadi karena prinsip eksklusi Pauli, gas Fermi-Dirac memiliki energi rata-rata cukup besar meskipun pada suhu nol mutlak.

Sekarang kita hitung energi Fermi  $\varepsilon_F = \varepsilon_{F0}$  pada suhu nol.

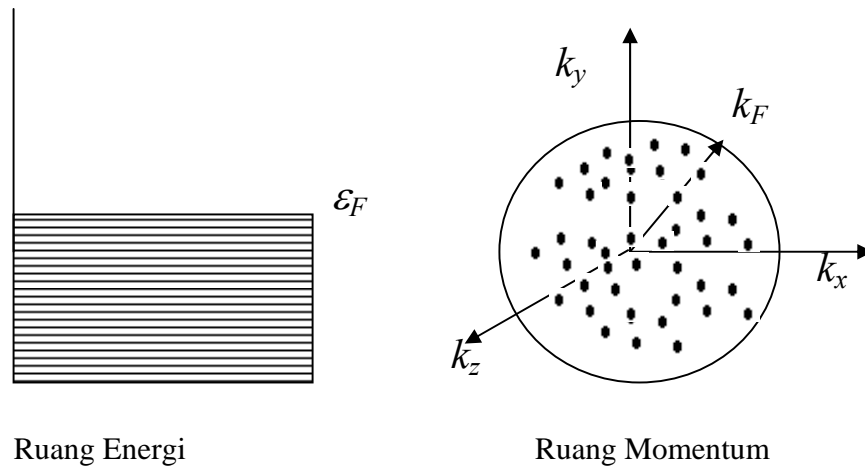
Energi tiap partikel berkaitan dengan momentum  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ .

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Pada suhu  $T=0$  semua keadaan energi rendah terpenuhi sampai energi Fermi, yang berhubungan dengan “momentum Fermi”,  $p_F = \hbar k_F$ .

$$\varepsilon_{F0} = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

Jadi pada  $T=0$  semua keadaan dengan  $k < k_F$  terisi, sedangkan pada  $k > k_F$  kosong.



Disini terdapat  $\frac{V}{(2\pi)^3}$  keadaan translasi per unit volume di ruang- $k$

Sehingga “bola Fermi” dengan radius  $k_F$  berisi:

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \times \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) \text{ keadaan translasi}$$

Karena elektron (spin  $1/2$ ) dapat memiliki dua keadaan, maka:

$$2 \frac{V}{(2\pi)^3} \times \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) = N$$

Pembuktian jumlah keadaan translasi per-unit volume pada ruang- $k$ :

$$\rho d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k$$

Fungsi gelombang partikel bebas:

$$\psi = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

Pertimbangkan unit volume kecil dengan sisi-sisi  $L_x, L_y, L_z$  dapat dibuktikan:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x; \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y; \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z$$

Oleh karena itu jumlah keadaan translasi untuk bilangan gelombang antara  $k$  dan  $k + dk$  adalah:

$$\begin{aligned}\rho d^3k &= \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L_x}{2\pi} dk_x\right) \left(\frac{L_y}{2\pi} dk_y\right) \left(\frac{L_z}{2\pi} dk_z\right) \\ &= \left(\frac{L_x L_y L_z}{(2\pi)^3}\right) k_x k_y k_z \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k\end{aligned}$$

(see Reif page 353-358 for more detail)

Seterusnya:

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

jadi

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} = 2\pi \left(\frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

dari hal tersebut, energi Fermi pada suhu nol mutlak:

$$\varepsilon_{F0} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Apa manfaat besaran ini? adakah besaran makroskopis terukur yang dapat dikaitkan dengan besaran ini?

→ satu diantaranya: kapasitas panas elektronik zat padat.

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V$$

Kalau elektron mengikuti distribusi Maxwell-Boltzmann, maka

$$\bar{E} = \frac{3}{2} NkT \rightarrow C_V = \frac{3}{2} Nk \text{ atau } 3R$$

dan tentu saja kalau digunakan distribusi Fermi-Dirac, bentuk ini akan jauh berbeda.

Mengikuti distribusi FD, energi rata-rata elektron:

$$\bar{E} = \sum_r \frac{\varepsilon_r}{e^{\beta(\varepsilon_r - \varepsilon_F)} + 1}$$

Karena jarak antara level-level energi sangat dekat, maka jumlah dapat diganti menjadi integral:

$$\bar{E} = 2 \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)} + 1} \rho(\varepsilon) d\varepsilon$$



disini  $\rho(\varepsilon) d\varepsilon$  kerapatan keadaan yang berada pada energi antara  $\varepsilon$  dan  $\varepsilon + d\varepsilon$ .

Evaluasi integral  $\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)} + 1} \rho(\varepsilon) d\varepsilon$  dengan keadaan  $kT \ll 1$  akan menghasilkan:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \rho_0(\varepsilon_{F0})$$

dengan demikian

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{2\pi^2}{3} k^2 \rho_0(\varepsilon_{F0}) T$$

Hasil ini berbeda dengan perumusan klasik (MB) yang menunjukkan bahwa  $C_V$  konstan.

Kalau dimasukkan:

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V}{(2\pi)^3} \left( 4\pi k^2 \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon \right) = \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{\hbar^3} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

diperoleh:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} kN \frac{kT}{\varepsilon_{F0}}$$

rumusan terakhir ini ternyata sesuai dengan hasil eksperimen.

Bentuk yang lebih umum sesungguhnya ada suku-suku  $T$  order tinggi:

$$C_V = A T + B T^3$$

Perumusan ini dapat diperoleh dengan evaluasi integral  $\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)} + 1} \rho(\varepsilon) d\varepsilon$  tanpa pendekatan  $kT \ll 1$ .

Contoh soal:

Hitunglah besar panjang gelombang Fermi untuk  $4,2 \times 10^{21}$  elektron yang berada dalam kotak  $1 \text{ cm}^3$ ! Hitung energi Fermi! Bila elektron diganti neutron, hitung panjang gelombang dan energi Fermi! (dalam kasus terakhir, anggap momentum tetap sama)

Jawab:

$$\text{Jumlah total partikel adalah: } N = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \times \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right)$$

sehingga bilangan gelombang Fermi:

$$k_F = \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}$$

dan panjang gelombang Fermi:

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} = 2\pi \left( \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{N} \right)^{1/3} = \left( \frac{8\pi}{3} \frac{V}{N} \right)^{1/3}$$

$$= \left( \frac{8\pi}{3} \frac{10^{-6}}{4,2 \times 10^{23}} \right)^{1/3} = 1,25 \times 10^{-9} \text{ m} = 12,5 \text{ \AA}$$

Energi Fermi:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = 1,54 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= 0,96 \text{ eV}$$

Jika elektron diganti neutron:

$$\lambda_F = 12,5 \text{ \AA}$$

dan  $\varepsilon_F$  (neutron) =  $\frac{m_{\text{elektron}}}{m_{\text{neutron}}} \varepsilon_F = 5,2 \times 10^{-4} \text{ eV}$

### Soal-soal Latihan:

7.1. Untuk atom Natrium yang memiliki sekitar  $2,6 \times 10^{22}$  elektron konduksi per  $\text{cm}^3$ , carilah energi Fermi Natrium dan perkiraan kapasitas panas elektronik pada suhu kamar.

7.2. The three lowest energy levels of a certain molecule are  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = \varepsilon$ , dan  $E_3 = 10\varepsilon$ . Show that at sufficiently low temperature (how low?) only level  $E_1$  dan  $E_2$  are populated. Find the average energy  $E$  of the molecule at temperature  $T$ . Find the contribution of these levels to the specific heat per-mole,  $C_V$ , and sketch  $C_V$  as function of  $T$ . (Anggap partikel memenuhi statistika Boltzmann)

7.3 Suatu sistem gas terdiri dari  $N$  molekul identik yang tidak berinteraksi dalam suatu wadah bervolume  $V$  pada suhu  $T$ . Setiap molekul memiliki 4 kemungkinan keadaan internal yakni satu keadaan dasar dan tiga keadaan tereksitasi yang memiliki besar energi yang sama (terdegenerasi 3). Pada keadaan dasar energi internal molekul adalah  $\varepsilon_{\text{int}} = 0$ , sementara pada keadaan eksitasi memiliki  $\varepsilon_{\text{int}} = \varepsilon_1$ . Energi total untuk

satu molekul dapat ditulis sebagai  $\varepsilon = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \varepsilon_{\text{int}}$

- Cari fungsi partisi sistem,  $Z$ !
- Cari energi rata-rata untuk satu molekul gas,  $\bar{\varepsilon}$  !
- Cari kapasitas panas  $C_V$  dan buat sketsa  $C_V$  terhadap  $T$ !