

IX. Aplikasi Mekanika Statistik

9.1. Gas Ideal Monatomik

Sebagai “*test case*” termodinamika statistik, kita coba terapkan untuk gas ideal monatomik.

Mulai dengan fungsi partisi:

$$Z = \sum_j g_j \exp \frac{-\varepsilon_j}{k_B T}$$

Energi tiap partikel ε_j dapat dinyatakan:

$$\varepsilon_j = \frac{n_j^2 h^2 V^{-2/3}}{8m}$$

(berasal dari $\varepsilon = p^2/2m$, sedangkan $p = nh/\lambda$ dst. Derivasi lebih mendetail membutuhkan sedikit pengetahuan Mekanika Kuantum.)

Hasil akhir:

$$Z = V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$$

“test case” dilakukan dengan melihat hasil:

$$P = NkT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T$$

disini $\ln Z = \ln V + \ln \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2}$, sehingga

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{V}$$

kita dapatkan

$$P = NkT \frac{1}{V}$$

atau $PV = NkT \rightarrow$ sesuai dengan persamaan gas ideal yang diperoleh dari

- Termodinamika klasik
- Teori kinetika gas

Hal lain, energi dalam $U = NkT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} NkT$ juga sesuai dengan pendekatan non-statistik.

Konklusi: ketiga pendekatan ini saling sesuai dan saling komplemen.

9.2. Distribusi Kecepatan Molekul

Dari fungsi partisi molekul-molekul gas dapat diturunkan distribusi molekul pada suatu daerah kecepatan tertentu.

Suatu molekul m berada bersama-sama molekul-molekul yang lain membentuk gas. Bila gaya luar tidak ada (seperti gravitasi), energi molekul menjadi:

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{gas ideal sehingga tidak ada energi potensial})$$

seterusnya, probabilitas menemukan molekul:

$$P_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} \propto e^{-\beta[p^2/2m]} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$$

disini $\beta = 1/kT$

Arti fisis persamaan terakhir: kemungkinan menemukan molekul dengan pusat massa dalam jangkauan $(\mathbf{r} ; d\mathbf{r})$ dan $(\mathbf{p} ; d\mathbf{p})$.

Apabila persamaan ini dikalikan dengan N (jumlah keseluruhan molekul) maka hasilnya menunjukkan nilai rata-rata jumlah molekul pada jangkauan posisi dan momentum tersebut.

Persamaan terakhir ini kalau diterjemahkan “dalam bahasa” kecepatan, mengingat $\mathbf{v} = \mathbf{p}/2m$ akan menjadi:

$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$ yang berarti jumlah molekul yang memiliki pusat massa antara $\mathbf{r}$ dan $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ dengan kecepatan antara $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = C e^{-\beta m v^2 / 2} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$$

Setelah dinormalisasi menghasilkan $C = \frac{N}{V} \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2}$, tulis $n = \frac{N}{V}$, maka:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m v^2 / 2} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}$$

$$\mathbf{r} \text{ dan } \mathbf{v} \text{ saling independen} \rightarrow f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m v^2 / 2} d^3\mathbf{v}$$

Sekarang kalau kita lihat besar kecepatan saja (tanpa melihat arah).

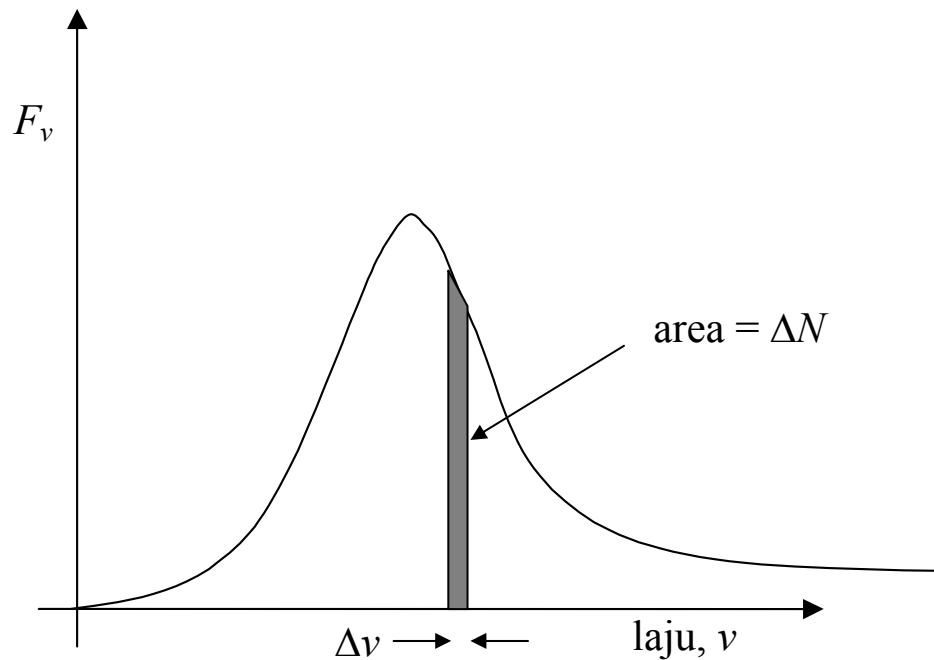
Jumlah partikel yang memiliki besar kecepatan antara v dan $v + \Delta v$.

$$F_v dv = 4\pi v^2 f(v) dv$$

Sehingga dapat ditulis

$$F_v \Delta v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \Delta v$$

Terkadang ditulis $\Delta N = F_v \Delta v$



Dari persamaan ini dapat dicari jumlah partikel yang memiliki daerah kecepatan tertentu.

Juga dapat dicari:

- kecepatan partikel rata-rata $\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN_v}{\int_0^{\infty} dN_v}$
- kecepatan partikel yang paling banyak dimiliki oleh molekul, yaitu kondisi $\frac{\partial F_v}{\partial v} = 0$
- kecepatan rms: $v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}}$, dengan $\overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 dN_v}{\int_0^{\infty} dN_v}$

Didapat:

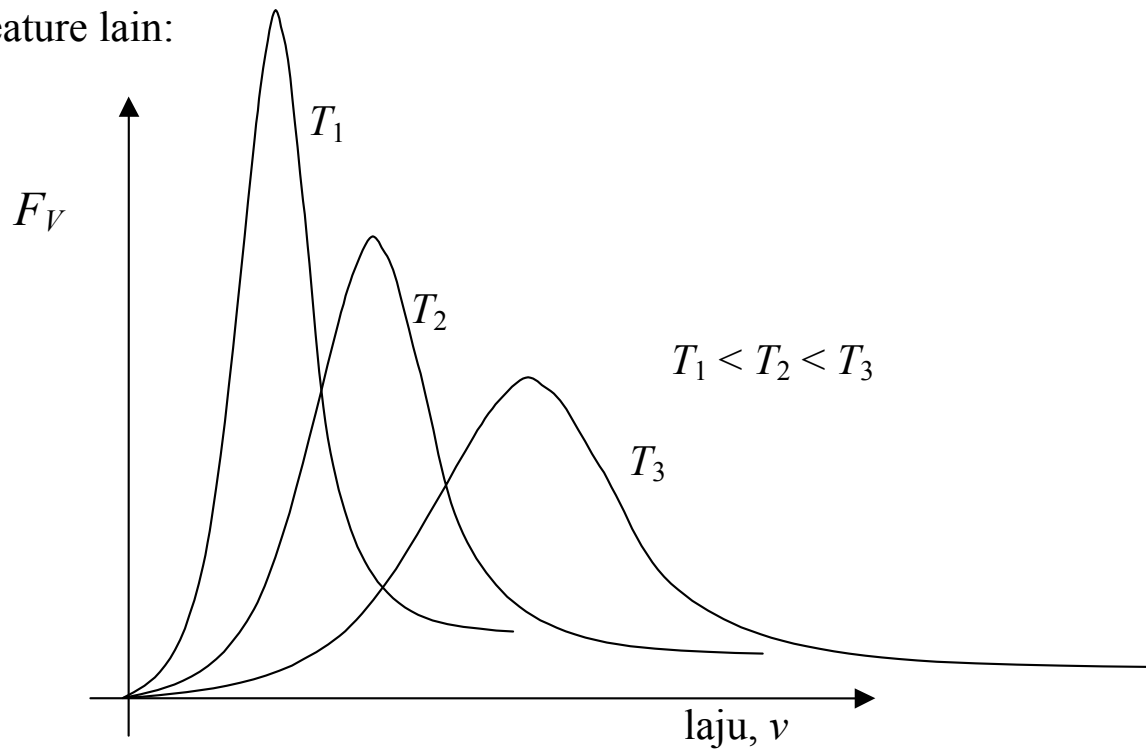
$$v_m = \sqrt{2 \frac{kT}{m}}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}} = \sqrt{2,55 \frac{kT}{m}}$$

$$v_{rms} = \sqrt{3 \frac{kT}{m}}$$

jadi $v_m : \bar{v} : v_{rms} = 1 : 1,128 : 1,224$

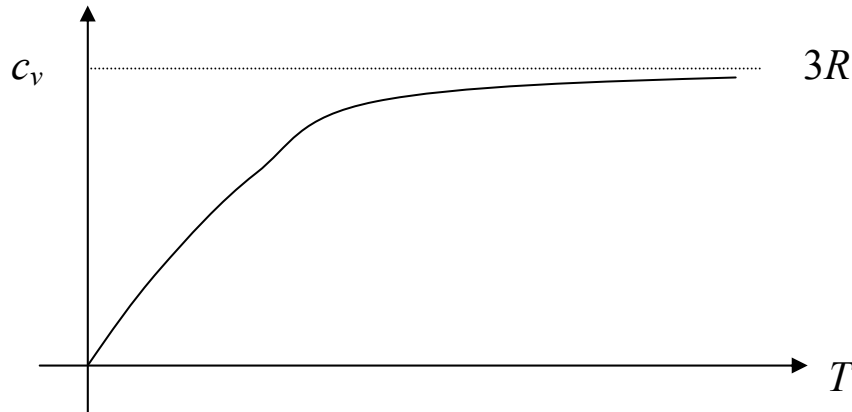
Feature lain:



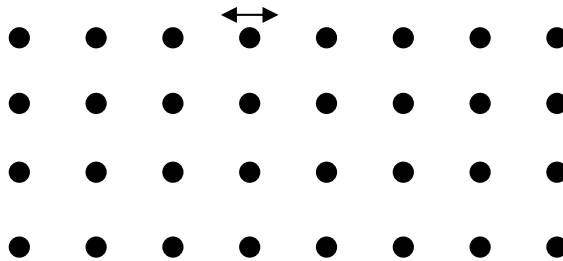
What can you tell about this picture?

9.3. Teori Einstein tentang Kapasitas Panas Zat Padat

Dalam pembahasan sebelumnya, kapasitas panas zat padat pada berbagai zat pada volume tetap mendekati formula Dulong-Petit $3R$ untuk suhu tinggi, namun berkurang pada suhu rendah.



Salah satu penjelasan awal dari fenomena ini adalah oleh Einstein yang menganggap bahwa atom-atom pada zat padat pada pendekatan pertama merupakan sekumpulan osilator harmonis yang terkuantisasi dengan frekuensi sama ν .



Energi osilator harmonis:

$$\varepsilon_j = n_j h \nu$$

Lalu gunakan fungsi partisi:

$$Z = \sum e^{-\beta \varepsilon_j}$$

dan

$$U = NkT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V$$

diperoleh:

$$U = 3 N k \theta_E \left[\frac{1}{\exp(\theta_E / T) - 1} + \frac{1}{2} \right]$$

dengan θ_E merupakan temperatur Einstein yang didefinisikan sebagai $\theta_E = h \nu / k$

Dari hal ini kapasitas panas pada volume konstan dapat diperoleh:

$$c_v = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp(\theta_E / T)}{[\exp(\theta_E / T) - 1]^2}$$

Dapat dilihat pada suhu tinggi $c_v \approx R$ (sesuai Dulong-Petit) dan teori ini dapat menerangkan fenomena turunnya nilai c_v pada suhu yang cukup rendah.

Namun pada suhu sangat rendah teori ini tidak berkesesuaian dengan fakta eksperimen. Jadi meskipun dalam suatu bagian teori ini menunjukkan pendekatan yang benar, namun belum semua fenomena dapat diterangkan oleh teori ini.

9.4. Teori Debey tentang Kapasitas Panas Zat Padat

Berbeda dengan Einstein, Debey berpendapat bahwa frekuensi vibrasi pada zat padat tidak sama tetapi frekuensi ini sesuai dengan frekuensi natural masing-masing atom. Frekuensi alamiah (natural) atom-atom dalam kristal sama seperti frekuensi gelombang stasioner bila kristal dianggap benda kontinu. Cara perhitungan berikutnya seperti model Einstein.

Pendekatan ini ternyata menghasilkan nilai c_v yang lebih cocok pada suhu sangat rendah.

→ Pembahasan lebih lanjut dalam kuliah Pendahuluan Fisika Zat Padat dan Fisika Statistik.